5：微分の復習・使い方

ミクロ経済入門・ミクロ経済学の考え方

赤井伸郎

本資料は、この講義の前任者である室岡先生の資料をベースに加筆修正したものである。

微分とはなにか？

- 一変数関数$y=f(x)$の、点$x=x^*$における微分を考える。
- ここで微分とは、「***x*が点*x****からほんの少し変化したときに、yが$f(x^*)$からどのくらい変化するか」を求めるために用いられる。

- 例1：財 x の購入量がほんの少し増えたとき、効用y はどのくらい増えるか（＝限界効用）
- 例2：財 x の購入量がほんの少し増えたとき、総支出y はどのくらい増えるか（＝限界支出）

微分と接線の傾き

- 一変数関数$y = f(x)$の、点$x = x^*$における微分を考える。
- ここで、「xが点x^*からほんの少し変化したときに、yがf(x*)からどのくらい変化するか」は、関数f(x)の点x*における接線の傾きに他ならない。
- 関数$f(x)$の点x^*における接線の傾きを、「$f(x)$の点x^*における微分係数 $f'(x^*)$」と呼び、以下のように定義する：

$$f'(x^*) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x^* + \epsilon) - f(x^*)}{\epsilon}$$

- ここで、関数fが点x^*において「滑らか」なら、微分係数は一意に定まる（詳しくは『社会科学のための数学』にて扱う）。

なぜ微分は便利か：一階条件

- $f(x)$の点x^*における微分係数 $f'(x^*)$ を考える。ここで、
  $f'(x^*) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ は点x*の付近で増加
  $f'(x^*) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ は点x*の付近で減少

という性質が成り立つことに注意。

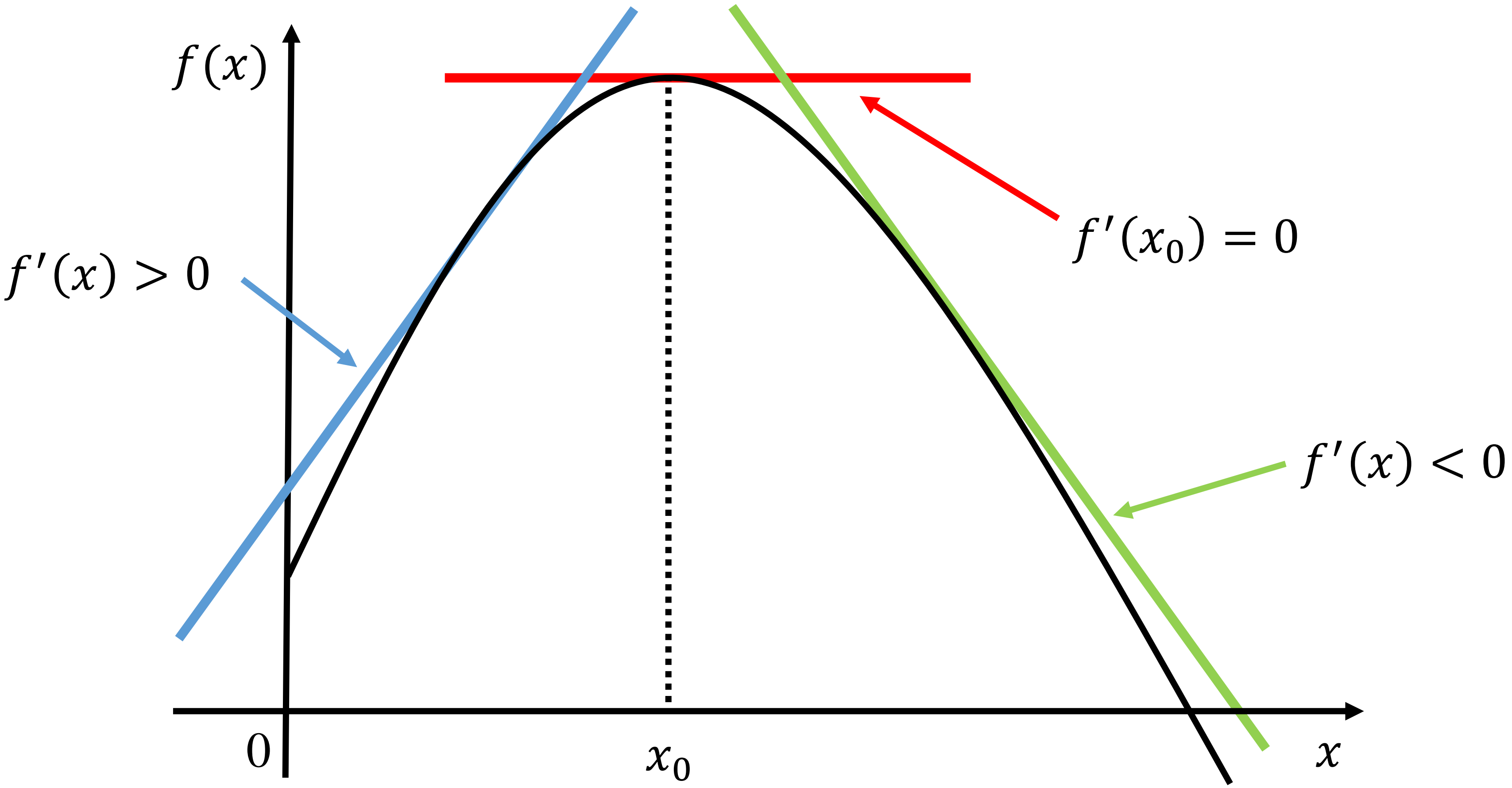
- ここから、「 $f(x)$ が内点 x^* で最大または最小となるならば、$f'(x^*) = 0$ を満たす」ことが導ける。これを一階条件（より詳しく言うと最適化の一階必要条件）と呼ぶ。

なぜ微分は便利か：一階条件

- つまり、「内点 x^* が最適解なら、微分係数がゼロ」！
- この条件は、消費者の効用最大化や企業の利潤最大化を考える際に非常に便利。

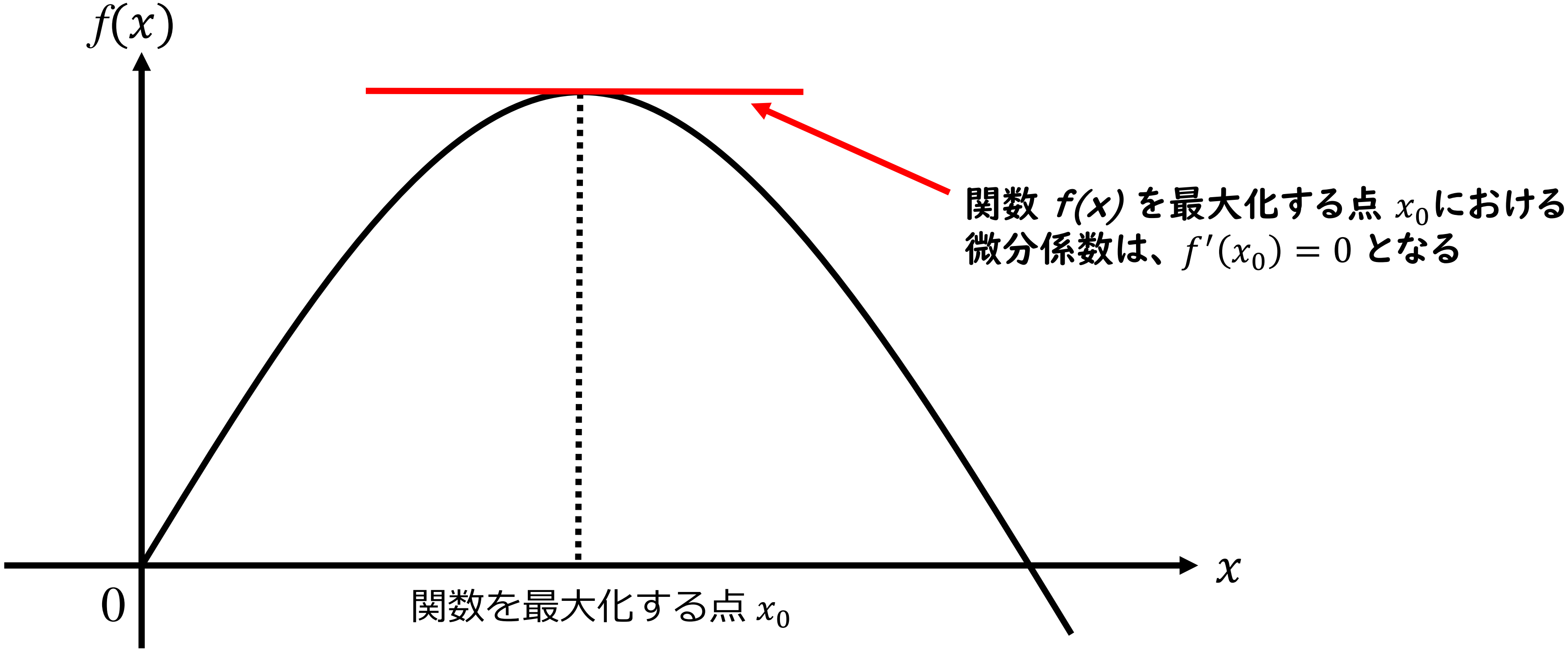
- 注意1：この条件は内点にしか使えない。端点（例：全くxを消費しない、つまり$x=0$）が最適かどうかは別に確認が必要！
- 注意2：一階条件は必要条件であって十分条件ではない。つまり、微分係数がゼロだからといって、最適解であるとは限らない。
  - 微分係数がゼロ＝最小化の点の可能性もある。
  - そもそも最小でも最大でもない可能性もある（例：x^3における$x=0$）。
  - 凹関数・凸関数など特定の性質をもつ関数形なら、一階条件は最適解の十分条件にもなる。詳しくは『社会科学のための数学』でカバーする。

一階条件：図による説明 (1/4)

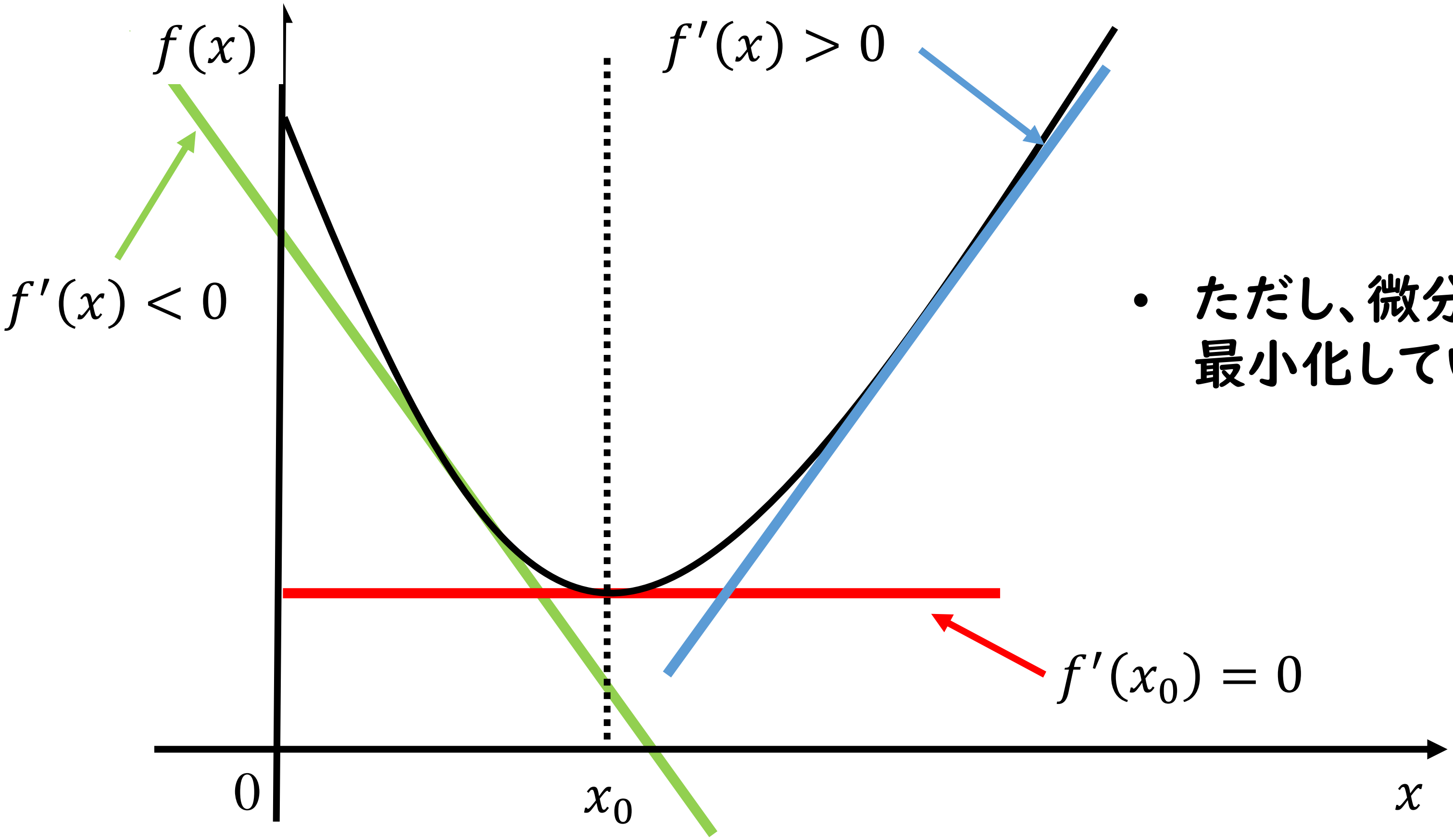


6

一階条件：図による説明 (2/4)

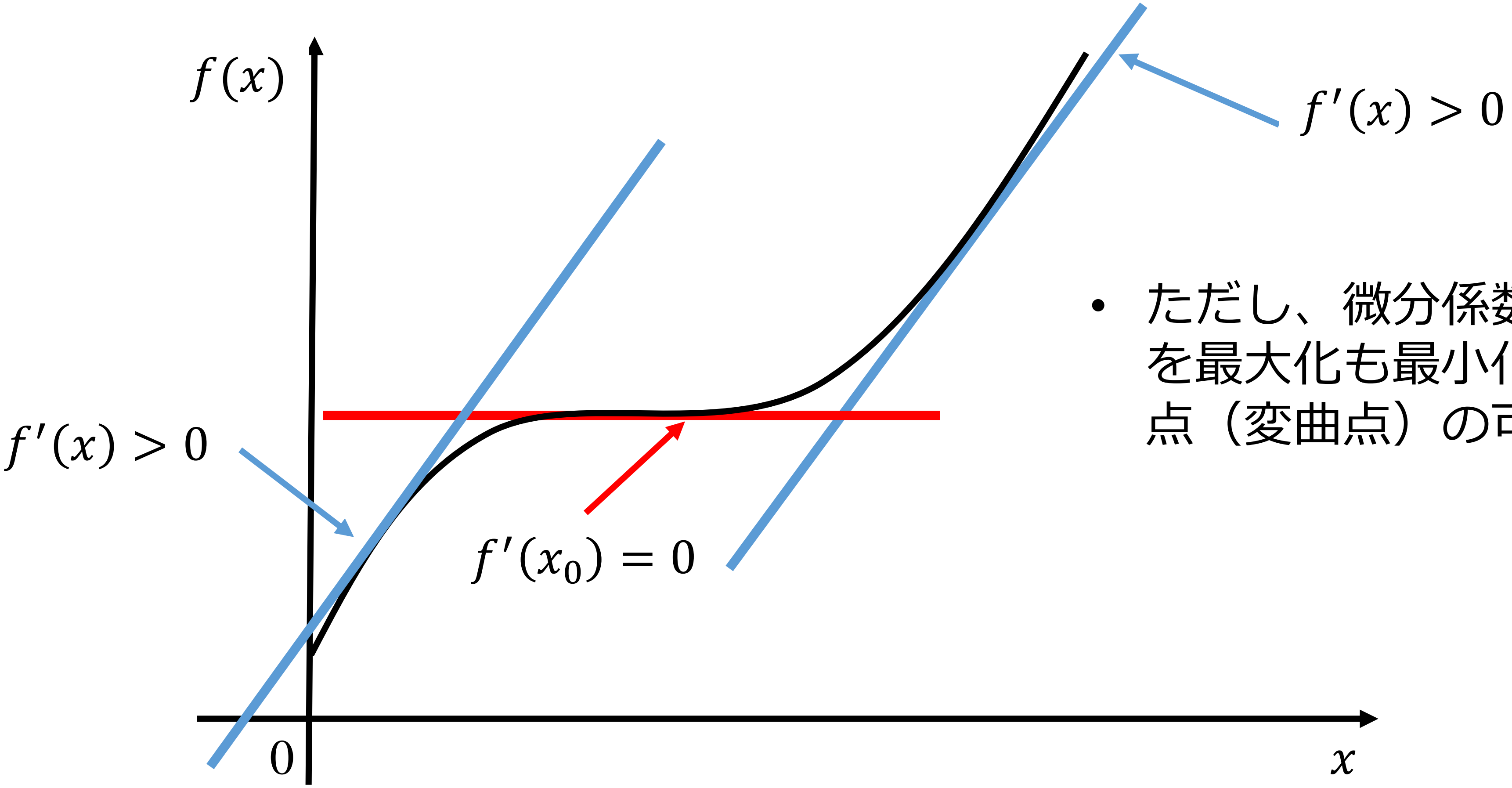


一階条件：図による説明 (3/4)



- ただし、微分係数がゼロ＝関数を最小化している点の可能性もある

一階条件：図による説明 (4/4)



- ただし、微分係数がゼロ＝関数を最大化も最小化もしていない点（変曲点）の可能性もある

微分の公式一覧

- 任意の微分可能な関数 $f(x), g(x)$ および任意の実数 $a \neq 0$ について以下が成立する：

1. $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$
2. $\left(af(x)\right)' = a\,f'(x)$
3. $f(x) = x^a$ ならば、$f'(x) = a\,x^{a-1}$
4. $\left(f(x) * g(x)\right)' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$（掛け算微分の公式）

- 詳しい解説は『社会科学のための数学』にて扱う！本講義では、次のスライドのような例題が解ければOK。

微分：例題

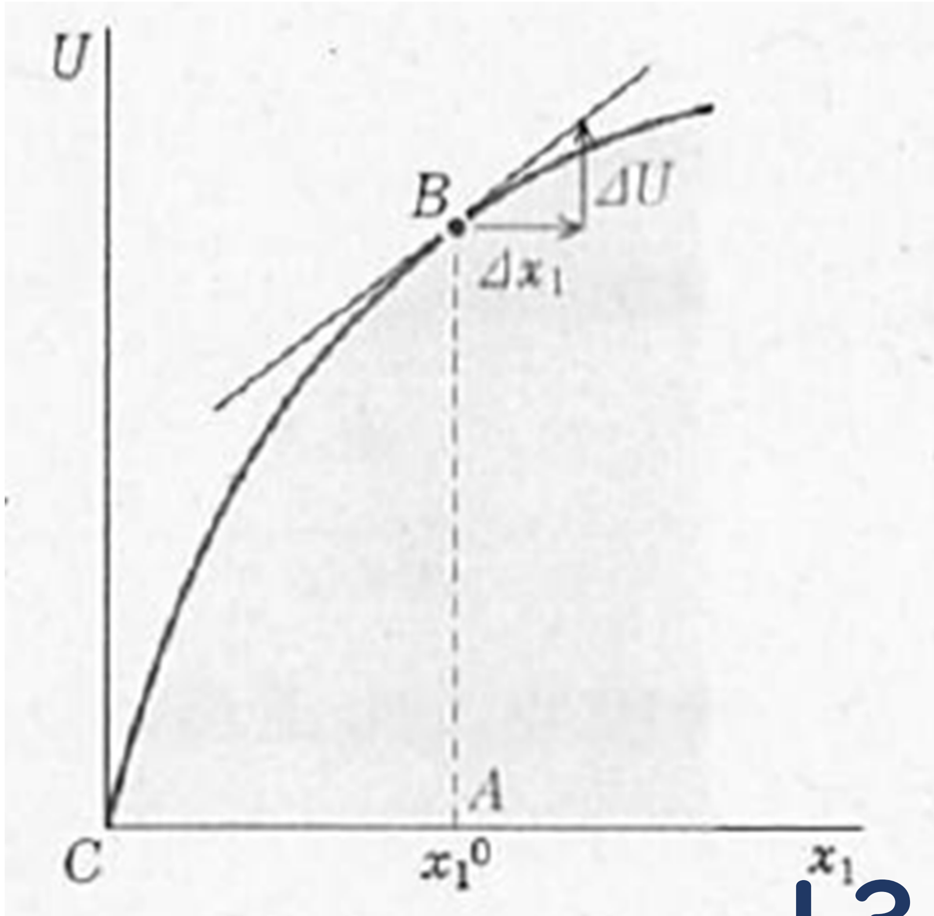
1. $(x^3 + 2x^2 + 50)' =$
2. $\left(\frac{a}{x}\right)' = a * (x^{-1})' =$
3. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' =$
4. $y = -x^3 + 300x$ がどの範囲で増加し、どの範囲で減少するかを調べる。

微分：例題の解答

1. $(x^3+2x^2+50)' = (x^3)' + 2*(x^2)' + (50)' = 3x^2+4x$.
2. $\left(\frac{a}{x}\right)' = a\ *(x^{-1})' = a*(-1)*x^{-2} = -\frac{a}{x^2}$.
3. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $y=-x^3+300x$ **がどの範囲で増加し、どの範囲で減少するかを調べる。このとき、**$y' = -3x^2+300$ **のため、**
   - $-3x^2+300>0 \Leftrightarrow (x-10)(x+10)<0$**, つまり**$-10<x<10$ **で増加、**
   - $-3x^2+300<0$**, つまり**$x<-10$または$x>10$で**減少。**
     - **ち**なみに、この場合$-3x^2+300=0$ **を満たす点、つまり** $x=-10$ および $x=10$ **は、それぞれ最大値でも最小値でもないことに注意。**

効用関数を数式で表す

- 1：効用は、消費が増えると増える。（限界効用はプラス）
- =>どんな微分条件？
- 2：限界効用は、消費が増えると減少する。（限界効用逓減の法則）
- =>どんな微分条件？
- 1財の時：効用と消費の関係を表す式は例えばどうなる？



微分と限界効用

- 例：チョコレートを$0 \leq x \leq 24$ だけ消費したときの（財xの消費のみから成る）効用が、$u(x) = 24x - \frac{x^2}{2}$である場合を考える。

- $\left(24x - \frac{x^2}{2}\right)' = 24 - x$より、このときの財の追加的な消費による限界効用は$24 - x$である。

- 例えば、$x = 0$のときの限界効用は24, $x = 8$のときの限界効用は16, $x = 16$のときの限界効用は8である。=>限界効用逓減の法則